Tijdschrift voor Economie en Management
Vol. XLIII, 4, 1998

Een binomiale inleiding tot het Black-Merton-Scholes optieprijsmodel

door P. SERCU*

I. INLEIDING

De bedoeling van deze tekst is een inzicht te geven in het waarderen van opties volgens de logica van het Black-Merton-Scholes-model. De benadering die we volgen is die van het "binomiaal model" dat vooral door Cox, Ross, and Rubinstein (1979) is uitgewerkt op basis van eerder werk van Sharpe (1978) en Rendleman and Bartter (1979).

Binomiale modellen werden eerst gebruikt in de fysica, door Wiener en Einstein, als modellering van de "Browniaanse beweging", d.w.z. de lukrake beweging van bijvoorbeeld moleculen, of van stofdeeltjes gesuspendeerd in een vloeistof. Aandelenkoersen, en op korte termijn ook wisselkoersen, gedragen zich ongeveer als een (ééndimensionale) Browniaanse beweging, en de Einstein-Wiener-wiskunde werd om die reden door Merton ((1971), (1973)) binnengebracht in de financiële literatuur, naar aanleiding van zijn her-afleiding van het Capital Asset Pricing Model in continue tijd. De vereenvoudigende veronderstelling van het binomiale model is dat een stofdeeltje (of, in een financiële context, de aandelenprijs of wisselkoers) in elke periode ofwel één stap stijgt, ofwel één stap daalt, en dat de richting van de verandering onafhankelijk is van de vorige verandering(en). Dit "ofwel +1, ofwel −1"-gedrag op een diskrete tijds-as lijkt op het eerste zicht niet erg realistisch, maar als je de periodes erg kort neemt en de sprong-grootte overeenkomstig inkrimpt, wordt in de limiet het gevolgde pad continu, en ligt voor om het even welke horizon het eindpunt normaal of lognormaal verdeeld relatief tegenover het beginpunt.

* Departement Toegepaste Economische Wetenschappen, K.U.Leuven, Leuven.

Black-Scholes (1973) en Merton (1973) waardeerden opties vertrekkende van de stochastische differentiaalrekening die volgt uit de limiet van het binomiaal proces. Cox, Ross en Rubinstein (1979) daarentegen waarderen eerst opties binnen een binomiaal model in discrete tijd, en nemen pas daarna de limiet. Hun eindpunt voor Europese opties is hetzelfde als bij Black, Merton, en Scholes, maar hun redenering is veel gemakkelijker te volgen – tenminste op de laatste limiet-stap na, die overigens voor de gewone gebruiker overbodig is. De binomiale oplossing is bovendien ook bruikbaar bij het waarderen van Amerikaanse opties, waarvoor geen echt analytische oplossing bestaat, en kan beschouwd worden als een soort numerieke oplossingsmethode van de Black-Merton-Scholes differentiaalvergelijking.

Dit artikel biedt alleen een inleiding tot deze literatuur en is gebaseerd op Hoofdstuk 6 van Sercu en Uppal (1995), waar heel wat technische details verder opgevuld worden. De tekst is als volgt gestruktueerd. Eerst leggen we, vanuit verschillende gezichtshoeken, de arbitrage-logica uit die aan de basis ligt van het binomiaal model, door een call te waarderen die vervalt na de eerste periode. In Afdeling III wordt het binomiaal proces over meerdere periodes voorgesteld. Afdeling IV beschrijft de werking van "dynamisch indekken" in een tweeperiodeprobleem. Uitbreidingen naar meer-periode opties, puts, power-opties, Amerikaanse en Bermuda-opties, en aandelenopties volgen in Afdeling V.

II. DE LOGICA VAN BINOMIALE OPTIEPRIJSMODELLEN

De binomiale logica kan uitgelegd worden vanuit twee invalshoeken – de "replicatie"-benadering van Cox, Ross, en Rubinstein, en de "indek"-benadering van Black-Scholes (1973) en Merton (1973). Repliceren betekent hier "namaken": we zoeken een combinatie (of "portefeuille") van eenvoudige activa die net dezelfde slotwaardes oplevert als de optie, en die eenvoudig te waarderen is; in de afwezigheid van arbitragemogelijkheden moet de optie dan dezelfde huidige marktprijs hebben als de replicerende portefeuille. Bij de "indek"-benadering daarentegen elimineren we eerst de onzekerheid over de slotwaarde van de optie, en waarderen we vervolgens de (risicovrije) ingedekte optie. De waarde van de optie zelf volgt dan uit de opsplitsing van de waarde van de ingedekte optie in twee componenten: de kostprijs van de indekking, en het residu, met name de waarde van de optie.

Zoals in vrijwel de gehele financiële literatuur, wordt in het basismodel aangenomen dat de financiële markt perfect is:

Veronderstelling 0: Markten zijn perfect. Er zijn geen transactiekosten, geen marges tussen leen- en beleggingsrentes, geen belastingen (of althans geen fiscale discriminatie tussen rente en koersveranderingen); en elke belegger kan handelen aan de vigerende marktprijs zonder die te beïnvloeden.

Qua liquiditeit en transactiekosten liggen wisselmarkten dicht bij de perfectie, zeker in vergelijking met de aandelenmarkten. Dit is één reden waarom het model hier aangepakt wordt vanuit valuta-opties eerder dan (zoals bij Black-Merton-Scholes) vanuit aandelenopties. Voor het uitleggen van de optie-logica zijn valutamarkten zijn echter vooral interessanter om een pedagogische of conceptuele reden: in de wisselmarkt bestaat een goed functionerende termijnmarkt, met een brede waaier van looptijden. In de oorspronkelijke afleiding wordt indekking of replicatie uitgevoerd in de contantmarkt – het enige type markt voor aandelen dat beschikbaar is in de VS – maar zowel de redenering als de interpretatie worden heel wat transparanter als we termijncontracten kunnen gebruiken. Vandaar dus onze keuze voor de wisselmarkt als uitgangspunt. De wisselkoers die we bekijken is bij veronderstelling een zuiver lukraak-vlottende koers, niet een koers die beweegt binnen een nauwe bandbreedte (zoals het klassieke EMS) of sterk aangetrokken wordt door een centrale waarde, zoals het huidige EMS.

De conventie in dit artikel is dat S_t wijst op een kontant-wisselkoers (*s*pot rate) of een aandelenprijs (*s*tock price), en F_t op een termijnprijs (*f*orward rate)[1]. Alle rentevoeten (r voor de binnenlandse, r^* voor de buitenlandse) zijn te interpreteren als eenvoudige percentage verschillen tussen begin- en slotwaarde in de beschouwde periode, zonder annualizatie. Die rentevoeten moet je dus eerst berekenen uit de *per annum* interestvoet voor de relevante looptijd.

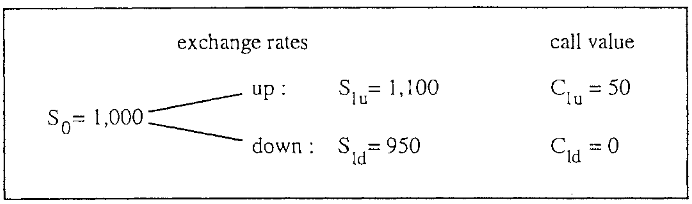
We vertrekken van een eenvoudig voorbeeld. De huidige tijd is "0", en de optie vervalt op tijdstip 1, één periode later. We bekijken een call op één DEM, met als thuismunt de ITL en uitoefeningsprijs X=1050 lire per DEM. De huidige koers is 1000 ITL. De risicovrije rente over de periode, tenslotte, is 5% voor de ITL, en 3.9604% voor de DEM – een rentevoet die gekozen is om een handelbare termijnkoers op één periode op te leveren:

$$F_0 = S_0 \frac{1+r}{1+r^*} = 1000 \frac{1.05}{1.039604} = 1010. \qquad (1)$$

Vanuit het huidige niveau (1000 ITL) kan de koers ofwel stijgen naar 1100, ofwel dalen naar 950. Onmiddellijk daarna vervalt de optie. Figuur 1 toont de overeenkomstige binomiale "boom", en geeft ook meteen de slotwaardes van de optie (met uitoefeningsprijs X=1050):

- als de koers 1100 is, dan is de call 50 waard,
- als de koers 950 is, dan is de call waardeloos.

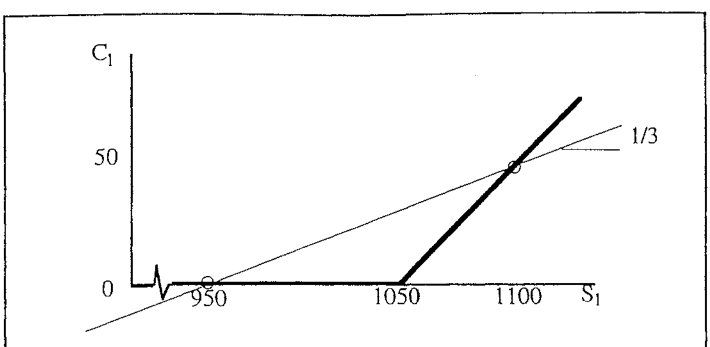
FIGUUR 1



Het zal nuttig blijken die gegevens ook grafisch voor te stellen (Figuur 2). De horizontale as toont de mogelijke wisselkoersen op ogenblik 1, en de vertikale as de overeenkomstige waarden van de aankoopoptie. De twee mogelijke uitkomsten zijn door punten aangeduid, en doorheen die twee punten trekken we een rechte, die we de *exposure*-rechte noemen. De helling ervan, de exposure, is gelijk aan 1/3:

$$\text{exposure} = \frac{C_{1u} - C_{1d}}{S_{1u} - S_{1d}} = \frac{50 - 0}{1{,}100 - 950} = 1/3 \qquad (2)$$

FIGUUR 2



A. *De Replicatie-benadering*

In deze afdeling tonen we eerst aan hoe de slotwaardes van de call kunnen gerepliceerd (nagebootst) worden in de termijn- en geldmarkt. Daarna rekenen we uit hoeveel de replicerende portefeuille ons kost. Tenslotte roepen we, om de optieprijs te vinden, de Wet der Identieke Prijs in – twee activa die onder alle omstandigheden identieke toekomstige slotwaarden opleveren moeten ook dezelfde beginwaarde hebben.

Uit Figuur 2 volgt dat we de slotwaardes van de call, [50 als $S_1 = 1100$] en [0 als $S_1 = 950$], kunnen nabootsen door de volgende portefeuille te vormen:

- een termijnaankoop van 1/3 DEM aan de normale termijnkoers, $F_0 = 1010$; en
- een deposito in thuismunt (ITL) met slotwaarde 20 op ogenblik 1.

Dit werkt als volgt. De slotwaarde van de termijnaankoop is 1/3 [S_1 – 1010], d.w.z. een rechte met helling 1/3 die de S-as kruist bij $S_1 = 1010$. Het toevoegen van het deposito verhoogt de totale slotwaarde met 20 in alle omstandigheden, wat grafisch overeenkomt met het omhoogschuiven van de rechte tot ze inderdaad samenvalt met de exposure-lijn. We kunnen narekenen dat de portefeuille de call repliceert – althans voor de twee wisselkoersen die mogelijk zijn:

- als $S_1 = 950$, levert de termijnaankoop $(1/3) \times (950 - 1010) = -20$ op, het deposito 20, en de totale portefeuille dus 0, net zoals de optie;
- als $S_1 = 1100$, levert de termijnaankoop $(1/3) \times (1100 - 1010) = 30$ op, het deposito 20, en de totale portefeuille dus 50, net zoals de optie.

In de tweede stap berekenen we hoeveel die replicerende portefeuille ons kost op ogenblik 0. De termijnaankoop is gratis[2], dus is de enige werkelijke uitgave het aanleggen van het deposito. Aangezien deze belegging een slotwaarde van 20 moet hebben en de risicovrije rente 5% per periode bedraagt, is de vereiste belegging gelijk aan 19.05:

$$\text{initiële belegging} = \frac{20}{1.05} = 19.05 \tag{3}$$

De derde stap in de redenering is dat de call ook 19.05 moet kosten, dit omwille van de Wet der Identieke Prijs. Meer bepaald zou elke afwijking leiden tot arbitragemogelijkheden:

- als de aankoopoptie méér zou kosten, bijvoorbeeld 19.4, dan koop je de replicerende portefeuille aan (tegen 19.05) en je verkoopt een call (tegen 19.4), wat je netto 19.4 – 19.05 = 0.35 oplevert. Omdat op ogenblik 1 de portefeuille altijd in staat is om perfect de potentiële schuld uit de optie te voldoen, is er geen enkele netto kasstroom meer in de toekomst, en is de netto instroom van 0.35 dus een zuivere geldmachine – wat te mooi is om waar te zijn: massale arbitrage moet het prijsverschil tussen de optie en haar replicerende portefeuille onmiddellijk opheffen;
- als de call daarentegen minder kost, bijvoorbeeld 18.80, dan *verkoop* je de replicerende portefeuille: je *leent* 19.05 aat 5% en je *verkoopt* 1/3 DEM op termijn. De schulden uit de lening en de termijnverkoop worden geheel en al gedragen door de opbrengst van de call; dus steek je volledig "gratis" 0.25 op zak, te weten het netto resultaat van 19.05 (de opbrengst van de lening) minus 18.80 (de kostprijs van de optie). Zulke geldmachines zijn weer te mooi om echt te kunnen bestaan.

B. *De indekbenadering*

In een één-periode binomiaal model komt de Black-Merton-Scholes erop neer dat een op de termijnmarkt ingedekte call gewaardeerd wordt, in plaats van de call zelf. Dit is handig omdat (a) het waarderen van een risicovrije portefeuille (zoals de ingedekte call) erg eenvoudig is, en (b) de niet-ingedekte call evenveel kost als de ingedekte, omdat termijndekking gratis is.

In wezen is dit verhaal gewoonweg het omkeren van replicatie. We zagen daarnet dat er een termijntransactie en een deposito bestaan zodat, op ogenblik 1,

$$\text{deposito}_1 + \text{termijnaankoop}_1 = \text{callwaarde}_1. \qquad (4)$$

Wat Black en Scholes (1973) of Merton (1973) doen is een simpele herschikking hiervan:

$$\text{deposito}_1 = \text{callwaarde}_1 - \text{termijnaankoop}_1. \qquad (5a)$$

of

$$\text{deposito}_1 = \text{callwaarde}_1 + \text{termijnverkoop}_1. \qquad (5b)$$

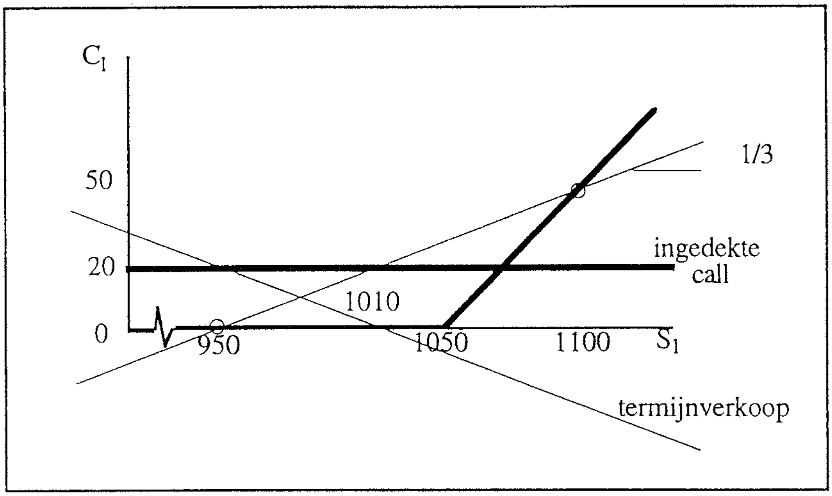
In woorden uitgedrukt: er bestaat een termijnverkoop die zorgt dat de call omgevormd wordt tot een risicovrije belegging. We kunnen inderdaad de call indekken door 1/3 DEM op termijn te verkopen:

- als $S_1 = 1100$, dan levert de termijnverkoop 1/3 [1010 - 1100] = –30 op, en de call 50; dus is de ingedekte call 20 waard; en
- als $S_1 = 950$, dan levert de termijnverkoop 1/3 [1010 - 950] = 20 op, en de call 0; dus is de ingedekte call weer 20 waard.

Kortom, de ingedekte call heeft een risicovrije slotwaarde, 20.

Grafisch werkt dit als volgt. De termijnverkoop van 1/3 DEM heeft een slotwaarde van 1/3 $[1010 - S_1]$, wat neerkomt op een rechte met helling –1/3. De exposure van de call is +1/3. Als we die twee rechtes bij elkaar optellen, dan krijgen we een rechte met helling nul – een risicovrije slotwaarde, die blijkbaar 20 bedraagt.

FIGUUR 3



Omdat de ingedekte call een risicovrije waarde (20) heeft op ogenblik 1, kan die ingedekte call op ogenblik 0 slechts één mogelijk marktwaarde hebben:

$$\text{marktwaarde van de ingedekte call op ogenblik } 0 = \frac{20}{1.05} = 19.05. \qquad (6)$$

Als dit niet zo is, dan is er weer een arbitragemogelijkheid. Stel dat de ingedekte call 18.00 kost; dan leen je massaal (aan 5%), en je koopt de ingedekte call, en je krijgt een risicovrij rendement van (20–18)/18 = 11.11%, wat te mooi is om waar te zijn. Of als de ingedekte call 19.40 waard is op de markt, dan schrijf je calls uit, en je dekt ze in; de onmiddellijke opbrengst is dan 19.40, en de (gekende) uitstroom op ogenblik 1 is 20, wat een risicovrije leenrentevoet van (20–19.40)/19.40 = 3.10% impliceert – minder dan de rente die je krijgt op een risicovrije belegging, en dus weer te mooi om waar te zijn.

We weten dus dat de ingedekte call 19.05 moet kosten. We weten ook dat de waarde van de call zelf gelijk moet zijn aan de waarde van de ingedekte call, omdat de termijndekking niets kost. Kortom, de enig mogelijke callprijs op ogenblik 0 is 19.05.

C. *De zekerheidsequivalent-interpretatie*

Het eigenaardige van bovenstaande waarderingsmodellen is dat we blijkbaar de call kunnen waarderen zonder te weten wat de kans is dat de koers stijgt of daalt, en zonder te weten wat de vereiste return op de belegging is rekening houdend met het risico. In deze afdeling tonen we aan dat beide stukken informatie – de kans van een stijging of daling, en de vereiste risico-correctie – al implicit verborgen zitten in de termijnkoers, 1010. Dit inzicht laat ons toe het replicatie- of indek-argument economisch te interpreteren.

1. De termijnkoers als de voor risico gecorrigeerde verwachte waarde

Een termijnkoers kan geïnterpreteerd worden als een soort verwachte waarde gecorrigeerd voor alle risico's die de markt belangrijk vindt. Dit kan als volgt aangetoond worden. Stel dat je een kasstroom verwacht van één eenheid valuta. In principe kan je de huidige waarde (HW_0) hiervan bepalen door de verwachte toekomstige waarde van die betaling, $E_0(\tilde{S}_1)$, te disconteren aan een rentevoet $E_0(\tilde{R}_s)$ die een correctie inhoudt voor alle relevante risico's van de positie – bijvoorbeeld het beta-risico, in het Capital Asset Pricing Model. Kortom, één manier om de huidige waarde te berekenen is

$$HW_0 = \frac{E_0(\tilde{S}_1)}{1 + E_0(\tilde{R}_s)} . \qquad (7)$$

Je kan echter ook de positie indekken; en omdat het termijncontract een initiële marktwaarde van nul heeft, is de ingedekte eenheid valuta evenveel waard als de niet-ingedekte eenheid. Het waarderen van de ingedekte positie is eenvoudig: omwille van de termijnverkoop realiseer je een risicovrije opbrengst gelijk aan de termijnkoers, en de gepaste disconteringsvoet voor risicovrije posities is de risicovrije rente, *r*. Kortom, het alternatief bestaat erin de toekomstige eenheid valuta te waarderen als

$$HW_0 = \frac{F_0}{1+r}\,. \tag{8}$$

Natuurlijk kan er op elk gegeven ogenblik maar één correcte huidige waarde zijn. Gelijkstelling van vergelijkingen (7) en (8) levert

$$\frac{E_0(\tilde{S}_1)}{1+E_0(\tilde{R}_s)} = HW_0 = \frac{F_0}{1+r}\,. \tag{9}$$

Bekijk nu beide zijden van (9). Aan de linkerzijde vertrek je van de verwachte toekomstige waarde (in de teller), en corrigeer je voor onzekerheid in de noemer: $E_0(\tilde{R}_s)$ is de risicovrije rentevoet plus de vereiste risicopremie. Aan de rechterzijde daarentegen wordt blijkbaar gedisconteerd aan de risico*vrije* rente, *r*. Aangezien beide benaderingen correct zijn, kan dat alleen betekenen dat, aan de rechterzijde, de risico-correctie al in de teller gebeurd is. Met andere woorden, de termijnkoers moet inderdaad de verwachte waarde zijn gecorrigeerd voor alle relevante risico's. Een synoniem voor "de verwachte waarde zijn gecorrigeerd voor risico" is "het zekerheids-equivalent" – het gekende bedrag dat dezelfde waarde heeft als de onzekere opbrengst. Stellen we een voor risico gecorrigeerde verwachte waarde voor door $E^c(.)$, dan kunnen we ons besluit als volgt formuleren:

$$F_0 = E_0^c(\tilde{S}_1) = \text{de voor risiko gekorrigeerde verwachte waarde}$$
$$= \text{het zekerheidsequivalent van } \tilde{S}_1. \tag{10}$$

2. Reïnterpretatie van het replicatie- of indekmodel.

De interpretatie van een termijnkoers als een voor risico gecorrigeerde verwachte waarde geldt altijd, en hangt dus niet af van een soort CAPM of binomiaal model. Binnen het binomiaal model laat die eigenschap van termijnkoersen ons wel toe het replicatie- or indek-argument te reïnterpreteren op een intuitief aantrekkelijke wijze.

Laat ons vertrekken van een gewone verwachte waarde, in het numerisch voorbeeld van daarnet. Gegeven dat er op ogenblik 1 maar twee mogelijke koersen zijn, 1100 of 950, is de verwachte waarde bepaald door de kans p dat de koers stijgt:

$$E_0(\tilde{S}_1) = p \times 1100 + (1 - p) \times 950 \tag{11}$$

De termijnkoers is, zoals we weten, een voor risico aangepaste verwachte waarde of zekerheids-equivalent. Nu is er in bovenstaande uitdrukking slechts één parameter: p; dus kan risico-correctie alleen gebeuren door p op een of andere manier te corrigeren. Met andere woorden, binnen een binomiaal model moet de formule voor de risico gecorrigeerde verwachte waarde van de volgende vorm zijn:

$$E_0^c(\tilde{S}_1) = q \times 1100 + (1 - q) \times 950 . \tag{12}$$

waarin q de voor risico gecorrigeerde kans is van een stijging. Er bestaat een uitgebreide theoretische literatuur die uitlegt hoe q moet bepaald worden in functie van p en andere economische variabelen. Voor onze doelstellingen is het echter niet nodig te begrijpen hoe de markt q vastlegt. Het enige wat wij voor optiewaardering nodig hebben is de waarde van q; en die waarde kan afgeleid worden uit de termijnkoers. In ons cijfervoorbeeld is $E_0^c(\tilde{S}_1)$ gelijk aan 1010, de termijnkoers. Dit gegeven laat ons inderdaad toe af te leiden welke waarde van q de markt impliciet gebruikt:

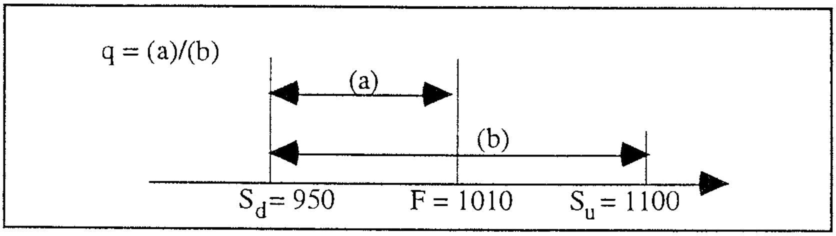
$$\begin{aligned} 1010 &= q \times 1100 + (1-q) \times 950 \\ &= 950 + q \times (1100 - 950). \end{aligned} \tag{13}$$

Daaruit volgt:

$$q = \frac{1010 - 950}{1100 - 950} = \frac{60}{150} = 0.4 \tag{14}$$

Deze oplossing heeft een handige grafische interpretatie (Figuur 4). In de teller staat de afstand tussen de termijnkoers (1010) en laagste waarde van de wisselkoers (950); en die afstand wordt gedeeld door de totale afstand tussen de hoge uitkomst (1100) en de lage (950). Ligt de termijnkoers dus dicht bij de bovenwaarde, dan is de (voor risico aangepaste) kans van een stijging dicht bij één. Ligt de termijnkoers daarentegen dicht bij de benedenwaarde, dan is q dicht bij nul.

FIGUUR 4



Deze informatie laat ons toe ook voor de optie de voor risico aangepaste verwachte waarde te berekenen. In dit binomiaal model is er inderdaad een één-tot-één verband tussen de wisselkoers en de waarde van de call op ogenblik 1: de call is 50 waard als, en alleen als, de wisselkoers 1100 is; en de call is 0 waard als, en alleen als, de wisselkoers 950 is. Omdat de gebeurtenis $S_1=1100$ dezelfde is als de gebeurtenis $C_1=50$, en de gebeurtenis $S_1=950$ dezelfde als de gebeurtenis $C_1=0$, is het logisch dat de zekerheids-equivalenten van $\tilde{S}_1$ en $\tilde{C}_1$ gebaseerd zijn op dezelfde risico-gecorrigeerde kansen. Kortom,

$$
\begin{aligned}
E_0^c(\tilde{C}_1) &= q \times 50 + (1 - q) \times 0 \\
&= 0.4 \times 50 + 0 \\
&= 20. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

(Herinner je dat 20 ook de slotwaarde was van de ingedekte call, zoals de termijnkoers ook de slotwaarde is van een ingedekte eenheid valuta.) Nu we de voor risico gecorrigeerde verwachte waarde gevonden hebben van de call, is het een koud kunstje de marktwaarde te berekenen. Immers, als de verwachte waarde al aangepast is voor onzekerheid, kan men gewoonweg disconteren aan de risicovrije rentevoet r, die hier 5% bedraagt:

$$C_0 = \frac{\mathrm{E}_0^c(\tilde{C}_1)}{1+r} = \frac{20}{1.05} = 19.05\,. \tag{16}$$

Tabel 1 vat deze interpretatie van het replicatie- of indekmodel samen.

TABEL 1

Binomiale waarderingsprocedure:

i) Leid de voor risiko aangepaste kans af, q, die verborgen zit in de terminkoers:

$$q = \frac{F - S_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}\,. \tag{a}$$

ii) Bereken hiermee het zekerheids-equivalent van de optie:

$$\mathrm{E}_0^c(\tilde{C}_1) = q \times C_{1,u} + (1-q) \times C_{1,d}\,. \tag{b}$$

iii) Diskonteer deze waarde aan de risicovrije rentevoet:

$$C_0 = \frac{\mathrm{E}_0^c(\tilde{C}_1)}{1+r} = \frac{q \times C_{1,u} + (1-q) \times C_{1,d}}{1+r}\,. \tag{c}$$

Dit levert voldoende inzicht in de "arbitrage-vrije" logica van het biomiaal model. In de volgende afdelingen breiden we toepassing uit tot andere soorten opties. Eerst en vooral moeten we echter de veronderstelligen van het meerperiodemodel begrijpen.

III. NOTATIE AND VERONDERSTELLINGEN VAN HET BINOMIAL MODEL OVER MEERDERE PERIODES

Zoals vermeld in de inleiding wordt een binomiaal proces gebruikt om een lukraak proces te benaderen, zoals een aandelenprijs of een zuiver vlottende wisselkoers. De veronderstelling is dus dat de verandering van deze periode onafhankelijk is van de voorbije veranderingen. In deze afdeling bekijken we hoe we best een eenvoudige binomiale "boom" kunnen opzetten, en bespreken ook de verdere veronderstellingen van het basismodel.

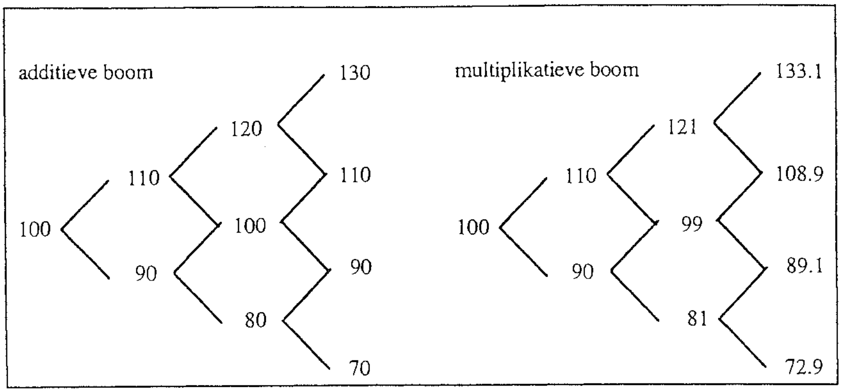
A. *Het uitbouwen van de binomiale boom*

In het rekenvoorbeeld waren de "op"- en "neer"-bewegingen asymmetrisch, zowel in absolute als in percentage-termen: de stijging was

+100 (+10%), de daling was –50 (–5%). Het is gebruikelijk (alhoewel niet essentieel voor de logica) om de "op" en "neer" bewegingen symmetrisch te nemen. Meer cruciaal is de vraag of we, in een meerperioden-context, de boom "additief" dan wel "multiplicatief" maken.

Stel bijvoorbeeld dat het startniveau 100 frank is, en de koers na één sprong ofwel 110 ofwel 90 bedraagt. In een *additieve* boom behouden we voor de daaropvolgende periodes telkens dezelfde stapgroottes *in franken*, dwz ± 10 frank. Dit leidt tot een boom als in de linkerzijde van Figuur 6. In een multiplicatieve boom daarentegen werken we met constante *percentage* veranderingen, dwz. altijd ±10%. Dit leidt tot een boom als getoond in de rechterzijde van Figuur 6.

FIGUUR 5



Vóór we een keuze maken, bekijken we eerst de verdeling van de eindprijs die tot stand komt als we de additieve boom een groot aantal keer laten uitdeinen. Stellen we de additieve prijsverandering tussen tijdstippen t en t+1 voor als $\Delta S_{t,t+1}$; dan geldt

$$\text{Additief: } S_n \equiv S_0 + \Delta S_{0,1} + \Delta S_{1,2} + \Delta S_{2,3} + \ldots + \Delta S_{n-1,n} \qquad (17)$$

De eindprijs is dus de som van onafhankelijke lotingen met steeds dezelfde verdelingsfunctie – bijvoorbeeld +10 met kans *p*, en –10 met kans (1-*p*). Uit de centrale limietstelling volgt dan dat de gemiddelde prijsverandering, na een groot aantal stappen, (Gaussiaans) normaal verdeeld is. Kortom, de additieve boom leidt tot normale verdelingen. Bij de multiplicatieve boom krijgen we uiteraard een ander resultaat. Stellen we de percentage prijsveranderingen tussen ogenblikken t en t=1 voor door $\Delta S_{t,t+1}/S_t$, dan geldt

$$\text{Multiplikatief: } S_n = S_0 \times \left(1 + \frac{\Delta S_{0,1}}{S_0}\right) \times \left(1 + \frac{\Delta S_{1,2}}{S_1}\right) \times \ldots \times \left(1 + \frac{\Delta S_{n-1,n}}{S_{n-1}}\right). \quad (18)$$

Omdat het hier om producten gaat, kunnen we hier de Centrale Limietstelling niet toepassen, want die spreekt over sommen. Het is echter eenvoudig een vermenigvuldiging om te vormen tot een som – neem gewoon logaritmes. Dan krijg je

$$\text{Multiplikatief: } \ln S_n = \ln S_0 + \ln\left(1 + \frac{\Delta S_{0,1}}{S_1}\right) + \ln\left(1 + \frac{\Delta S_{1,2}}{S_1}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{\Delta S_{n-1,n}}{S_{n-1}}\right). \quad (19)$$

Met andere woorden, in een multiplicatieve boom is het *logaritme* van de eindprijs gelijk aan de som van meerdere onafhankelijke lotingen uit dezelfde verdeling – bijvoorbeeld ln(1.10) = 0.0953 met kans p, en ln(0.9) = –0.1053 met kans (1–p). Dus kunnen we weer de Centrale Limietstelling inroepen, en stellen dat de gemiddelde verandering van het logaritme normaal verdeeld is. Kortom, we krijgen nu een normale verdeling voor logaritmes, wat men kernachtiger omschrijft als een *lognormale* verdeling.

We hebben daarnet gevonden dat een binomiale boom met constante opbouw leidt tot een normale of lognormale eindprijs, althans in de limiet. In de praktijk beschouw je natuurlijk altijd een *eindig* aantal stappen; maar toch krijg je altijd een soort klokvorm, met de meest waarschijnlijke uitkomsten rond het midden en met kleinere en kleinere kansen naarmate de uitkomst verder in de "staarten" van de verdelingsfunctie valt. Dit kan als volgt uitgelegd worden. Bekijk bijvoorbeeld de boom na twee stappen, en neem aan dat de kans van een stijging, p, gelijk is aan 0.45.

- Er is slechts één manier om in de hoogste koers terecht te komen: de koers moet twee keer na elkaar stijgen. De kans daartoe is 0.45 × 0.45 = 0.2025.
- De kans om in de laagste koers terecht te komen is analoog 0.55 × 0.55 = 0.3025, want daarvoor moet de koers twee keer na elkaar dalen.
- Je kan ook bij de middenste koers geraken, maar naar dit punt leiden *twee* paden – ofwel eerst op en dan neer, met kans 0.45 × 0.55 = 0.2475; ofwel eerst neer en daarna op, met kans 0.55 × 0.45 = 0.2475.

Je kan gemakkelijk nagaan dat het aantal paden dat naar een "middelmatige" uitslag leidt altijd groter is. Naar de hoogste prijs na *drie* veranderingen, bijvoorbeeld, leidt slechts één pad: op-op-op; maar naar de op één na hoogste prijs leiden nu drie paden – neer-op-op, of op-neer-op, of op-op-neer. Het feit dat "middelmatige" uitslagen langs veel meer paden bereikt kunnen worden verklaart de klokvorm in de waarschijnlijkheidsverdeling. De klokvorm is symmetrisch bij het additief proces. Bij het multiplicatief proces daarentegen is de klokvorm rechts-scheef omdat daar opeenvolgende prijsstijgingen (in franken) steeds hoger worden (omwille van returns-bovenop-returns), terwijl opeenvolgende dalingen steeds kleiner en kleiner worden.

Nu we implicaties van de alternatieven kennen, vergelijken we kritisch de additieve boom met de multiplicatieve, om een keuze te kunnen maken:

- Een prijsverandering van bijvoorbeeld ±10 frank per maand is misschien aanvaardbaar bij een niveau van 100, maar wordt wel verdacht klein bij een niveau van bijvoorbeeld 200, en wordt onaangenaam groot bij een niveau als 30. De multiplicatieve benadering daarentegen, met haar constante verdeling in termen van percentages, lijkt veel aanvaardbaarder.
- Bij de additieve boom kan de prijs negatief worden, bijvoorbeeld als er elf dalingen na elkaar voorkomen. Bij een multiplicatieve boom daarentegen zal, zelfs na een oneindig aantal dalingen met telkens 10%, de prijs nooit helemaal tot nul vallen. Bij aandelenprijzen of wisselkoersen zijn negatieve prijzen duidelijk onzin, dus ook die overweging doet ons weer naar de multiplicatieve boom overhellen.
- Als de wisselkoers S additief is, dan is $1/S$ – dezelfde wisselkoers vanuit de andere munt bekeken – niet meer additief. Als daarentegen het logaritme van S additief is, dan is het logaritme van $1/S$ ook additief[3]. Er is bij de multiplicatieve boom dus geen kunstmatige asymmetrie in de wisselkoersprocessen naargelang de thuismunt die we kiezen.

Om die redenen kiezen we voor de multiplicatieve boom eerder dan de additieve. In het basismodel worden percentage returns ("op" of "neer") constant gehouden doorheen de tijd. Voor de eenvoud verwijst de standaardnotatie niet naar de percentages zelf, maar naar één plus die percentages. Met name wordt één plus het "up"-percentage voorgesteld door u, en één plus het "down"-percentage door d. In het rekenvoorbeeld van daarnet, bijvoorbeeld, was u gelijk aan 1.10 (de koers steeg van 1000 naar 1100), en was d gelijk aan 0.95 (de koers daalde van 1000 naar 950).

Veronderstelling 1: de binomiale boom is multiplicatief, met constante returnfactoren u en d.

Implicatie van veronderstelling 1. Het basismodel postuleert dus een constant risico (in percent), dag na dag, of week na week, enz. Als u en d constant zijn, kan er dus nooit een crash of een onverwachte grote opstoot voorkomen. In de wiskunde van Black-Merton-Scholes komt dit overeen met de veronderstelling dat het proces voor S continu is (je kan het tijdspad van de koers tekenen zonder ooit je pen van het papier te lichten) en dat de *volatiliteit* – de op jaarbasis omgerekende standaard-deviatie van de de verandering van $\ln S$ – constant is. Het weg-veronderstellen van crashes of andere schommelingen in risico betekent een potentieel ernstige tekortkoming van het basismodel.

B. *De rentevoeten en de risico-gecorrigeerde kansen*

In het basismodel worden ook de binnenlandse en buitenlandse rentevoeten per periode, r en r^*, constant verondersteld.

Veronderstelling 2: r en r zijn constant doorheen de tijd.*

Implicatie van veronderstelling 2: Als de rente constant is – bijvoorbeeld 0.01% per dag, dit wil zeggen 1.0001365 –1 = 3,72% op jaarbasis – dan moet de termijnstructuur der interestvoeten vlak zijn; alle beleggingen op alle looptijden geven dan 3,72% per jaar. Als dit niet zo zou zijn, zou er een arbitragemogelijkheid zijn[4].

Een praktisch probleem is dat, aangezien in de realiteit de termijnstructuur nooit vlak is, je nooit weet wat "de" rentevoet is zoals gebruikt in het model. Als je een optie op drie maand modelleert met een boom van 92 dagelijkse veranderingen, vertrek je dan van de interestvoet op 3 maand, of de interestvoet op één dag, of die op één maand[5]? Men kiest doorgaans de eerste oplossing, maar dat is eigenlijk een natte-vinger-keuze.

Implicatie van veronderstellingen 1 en 2: Gegeven die veronderstellingen is de voor risico gecorrigeerde kans van een stijging, q, constant doorheen de tijd. Dit kan als volgt aangetoond worden. Uit vergelijking (a) in Tabel 1 weten we dat, in het één-periodemodel q gegeven is door

$$q = \frac{F_0 - S_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}. \tag{20}$$

Nu kunnen we $S_{1,u}$ en $S_{1,d}$ schrijven als, respectievelijk, $S_0 \times u$ en $S_0 \times d$. De termijnkoers voor één periode is anderzijds gegeven als $F_0 = S_0\,(1+r)/(1+r^*)$. Dus kan je q herschrijven, en vervolgens vereenvoudigen, als volgt:

$$q = \frac{S_0 \dfrac{1+r}{1+r^*} - (S_0 \times u)}{(S_0 \times u) - (S_0 \times d)} \tag{21}$$

$$= \frac{\dfrac{1+r}{1+r^*} - d}{u - d}. \tag{22}$$

Als de rentevoeten en de u- en d-factoren constant zijn, dan is dus ook q constant. Met andere woorden, dit model verwaarloost alle schommelingen in q die tot uiting komen in veranderingen in de volatiliteit (u en d) en de rentevoeten (r en r^*)[6].

Veronderstelling 3: $S_t \times d < F_t < S_t \times u$. Deze veronderstelling komt eigenlijk neer op het uitsluiten van arbitragewinsten. In een binomiale wereld móet de termijnkoers altijd tussen de hoge en lage wisselkoers moet liggen, anders heb je arbitragemogelijkheden. Als bijvoorbeeld de twee mogelijke koersen 1100 en 950 zijn, en als de termijnkoers 900 zou bedragen, dan zou je op termijn kunnen kopen en zonder initiële investering een winst binnenrijven van minstens 50 en misschien wel 200.

Implicatie van veronderstelling 3: Uit veronderstelling 3 en vergelijking (20) volgt dat q altijd tussen 0 en 1 ligt. Dit is uiteraard een wenselijke eigenschap voor een probabiliteit, of ze nu voor risico gecorrigeerd is of niet.

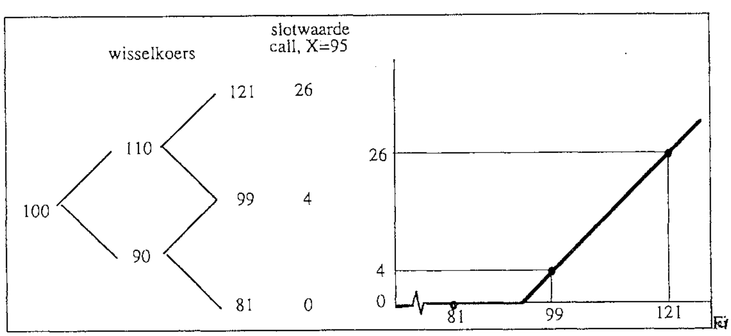
Een aspect dat we hier niet uitwerken is hoe je u en d kiest. De procedure bestaat erin dat je eerst vooropstelt welke standaard-deviatie het logaritme van de koers moet hebben op de vervaldag. Vervolgens kies je hoeveel deelperiodes je wil in binnen de totale looptijd – bijvoorbeeld 100, of 150. Er bestaan dan formules die toelaten om, gegeven het aantal stappen, de gewenste standaard-deviatie voor de slotkoers te vertalen naar een overeenkomstige waarde van u en d.

IV. DE 2-PERIODE EUROPESE CALL EN HET PRINCIPE VAN DYNAMISCH INDEKKEN/REPLICEREN

Een duidelijk bezwaar tegen het een-periodemodel is de veronderstelling dat de wisselkoers op de vervaldag slechts twee mogelijke waarden kan aannemen. Het zou beter zijn een rijkere verdeling te hebben, met veel meer mogelijke slotwaarden. Dit bereik je natuurlijk door de boom meerdere periodes te geven, zoals net uitgelegd werd in afdeling III. Door een wisselkoers op bijvoorbeeld drie maand te modelleren als het resultaat van 92 dagelijkse binomiale veranderingen, heb je al 93 mogelijke slotkoersen. Dat is nog altijd een stuk minder dan wat er in de realiteit kan gebeuren, maar is wel een duidelijke vooruitgang tegenover het één-periodemodel.

We behandelen in deze afdeling een twee-periodenprobleem, wat genoeg is om de logica van meer-periode-modellen te vatten, en we werken met de multiplicatieve boom uit Figuur 5. Het relevant stuk van de boom, de eerste twee periodes, is voorgesteld in Figuur 6. Ons wordt gevraagd de prijs te vinden van een call die vervalt na de tweede prijsverandering en een uitoefeningsprijs van 95 heeft.

FIGUUR 6



In de rechtergrafiek van Figuur 6 zie je duidelijk dat de drie mogelijke punten niet meer op één rechte liggen. Dat betekent dat je de twee-periode-optie niet kan indekken of repliceren met één lineair instrument (zoals een termijncontract over twee perioden). Het probleem wordt wel oplosbaar als een bijkomende veronderstelling gemaakt wordt:

Veronderstelling 4: Op elke tussentijdse datum kunnen de beleggers gelijk welke financiële verrichting doen die nodig is om over één periode in te dekken of te repliceren.

Dit lijkt op het eerste zicht niet controversieel, maar wordt wel conceptueel problematischer als je, zoals Black-Merton-Scholes, de limiet neemt waarin het aantal periodes oneindig groot wordt en de lengte van elke deelperiode dus oneindig klein: dan wordt de veronderstelling dat het *continu* mogelijk is verrichtingen toe doen voor oneindig korte periodes. Dit klinkt echter erger dan het lijkt, omdat in de praktijk een dagelijkse indekking meestal zeer behoorlijk werkt.

Met behulp van Veronderstellingen 1 tot en met 4 kunnen we de optie waarderen door een reeks opeenvolgende indek- of replicatieoperaties te doen telkens over één deelperiode in plaats van één operatie over de gehele looptijd. Dit werkt als volgt. Stel dat de binnenlandse rente 5% beloopt, en de termijnfactor $(1+r)/(1+r^*)$ gelijk is aan 1.02. Met behulp van $u=1.1$, $d=0.9$, en formule (22) vind je dan

$$q = \frac{1.02 - 0.90}{1.10 - 0.90} = 0.6 . \tag{23}$$

We vinden de huidige prijs door eerst te kijken wat de optie kan waard zijn op ogenblik 1. Die tussentijdse waarde hangt natuurlijk af van de koers op dat ogenblik. De redenering werkt als volgt:

- Stel dat je, op tijdstip 1, merkt dat de koers 110 is. Dan zijn er daarna nog slechts twee mogelijke koersen: 99 of 121. Dit plaatst ons in een één-periode-probleem, waarin we de optie kunnen waarderen als de gedisconteerde gewogen verwachte waarde van de overeenkomstige call-waardes één periode daarna:

$$C_1(S_1 = 110) = \frac{(26 \times 0.60) + (4 \times 0.40)}{1.05} = 16.38. \tag{24a}$$

Als je in die situatie de optie wil indekken, dan werk je met een termijnverkoop van één eenheid valuta, want de exposure is dan

$$\text{exposure}(S_1{=}110) = \frac{26 - 4}{121 - 99} = 1 \qquad (24b)$$

- Stel daarentegen dat je, op tijdstip 1, merkt dat de koers 90 is. Dan zijn er daarna nog slechts twee mogelijke koersen: 99 of 81. Dit plaatst ons weer in een één-periode-probleem, met als resulterende callprijs

$$C_1(S_1 = 90) = \frac{(4 \times 0.60) + 0}{1.05} = 2.29\,. \qquad (25a)$$

Als je in die situatie de optie wil indekken, dan werk je met een termijnverkoop van 0.21 eenheden valuta, want

$$\text{exposure}(S_1{=}110) = \frac{4 - 0}{99 - 80} = 0.21\,. \qquad (25b)$$

- Nu zijn we ook in staat de prijs op ogenblik 0 te vinden. Inderdaad, op het einde van de eerste periode zijn slechts twee koersen mogelijk, 110 of 90, en de overeenkomstige waardes van de optie zijn gekend: die hebben we net berekend als, respectievelijk, 16.38 en 2.19. Dit plaatst ons terug in een twee-punten-probleem, waar we de optie kunnen indekken op basis van de exposure,

$$\text{exposure}(S_0 = 100) = \frac{16.38 - 2.19}{110 - 90} = 0.705\,. \qquad (26b)$$

Aangezien we kunnen indekken (of repliceren), geldt nog steeds de basismethode, waarbij je de gedisconteerde gewogen verwachte waarde berekent van de overeenkomstige call-waardes één periode daarna:

$$C_0(S_0 = 100) = \frac{16.38 \times 0.60 + 2.29 \times 0.40}{1.05} = 10.23\,. \qquad (26a)$$

Kortom, je hakt het twee-periode-probleem in één-periode-deelproblemen die elk op zichzelf oplosbaar zijn zoals samengevat in Tabel 1. Je begint in de laatste periode, en je werkt terug in de tijd tot je in op tijdstip 0 komt. Als je (als schrijver van de optie) je wil indekken, bereken je bij het begin van elke periode de nieuwe exposure, in het licht van de recentste informatie, en je past je termijnpositie telkens aan aan de nieuwe marktomstandigheden. Hoe dieper de call inthe-money geraakt, des te groter wordt je termijnverkoop-positie, en omgekeerd – vergelijk (25b), (25b), en (26b). Dit noemt men dynamisch indekken, of delta-hedging.

Delta-hedging werkt perfect – als tenminste de veronderstellingen van het model voldaan zijn. In de praktijk kan er echter heel was mislopen:

- We weten dat, in realiteit, de wereld niet binomiaal is: zelfs over een zeer korte horizon zijn meer dan twee koersniveaus mogelijk. Gelukkig is dit niet noodzakelijk een groot probleem, want de redenering draait niet zozeer om het bestaan van slechts twee toestanden in de volgende periode, maar wel om de veronderstelling dat, in de korte termijn (binnen de binomiale periode), het verband tussen optieprijs en wisselkoers vrijwel lineair is en dat de optie dus goed ingedekt/gerepliceerd kan worden met lineaire instrumenten zoals termijncontracten. Die bijna-lineariteit gaat goed op zolang de indekkingshorizon kort is (bijvoorbeeld één dag) en de koersverandering niet te groot is.
- Dit laatste brengt ons tot de veronderstelling van de afwezigheid van crashes of andere abnormaal-grote sprongen. Grote veranderingen in de wisselkoers betekenen dat een lineaire indekking slecht werkt; vandaar dat het nuttig is delta-hedging aan te vullen met "gamma"-hedging, die beter bescherming biedt tegen de effecten grote sprongen[7].
- Even belangrijk is de veronderstelling van constante parameters (u, d, r, r^*). Stel dat je de berekeningen in vergelijkingen (24)-(26) uitgevoerd had, en dat je dus een optie geschreven had aan $C_0 = 10.23$, ingedekt door een termijnverkoop van initieel 0.705 eenheden. Deze indekking anticipeert (en beschermt tegen) optieprijzen van, respectievelijk, 16.38 en 2.29, naargelang de koersevolutie. Als tegen periode 1 echter de onzekerheid (u en d) of de rentestand (r of r^*) onverwacht veranderd is, dan zullen de optieprijzen *niet* gelijk zijn aan 16.38 of 2.29, en dan schiet je zorgvuldig-bedoelde delta-indek-

king tekort. Elk model is slechts zo goed als zijn veronderstellingen. Vandaar de nood aan algemenere modellen die rekening houden met, en indekken tegen, onzekerheid over de rentevoeten en, vooral, de volatiliteit.

- Een verdere bron van problemen is de veronderstelling dat de indekker altijd onmiddellijk kan (ver)kopen aan de vigerende marktprijs, zonder die marktprijs te beïnvloeden. Delta-hedging betekent echter dat optieschrijvers allemaal tegelijk kopen na een koersstijging en verkopen na een koersdaling, wat kan betekenen dat de prijzen wel degelijk beïnvloed zijn en alle delta-hedgers de prijzen blijven achternahollen. In dunne markten (bijvoorbeeld aandelenmarkten) kan één middelgrote transactie al de prijs beïnvloeden.
- Ook transactiekosten komen niet voor in het basismodel. Leland (1985) toont hoe je de transactiekosten kan inbouwen door de volatiliteit te corrigeren, als tenminste het indekken met een vaste frekwentie gebeurt. Edirisinghe, Naik en Uppal (1993) berekenen grenzen op optieprijzen in een binomiaal model met kosten.

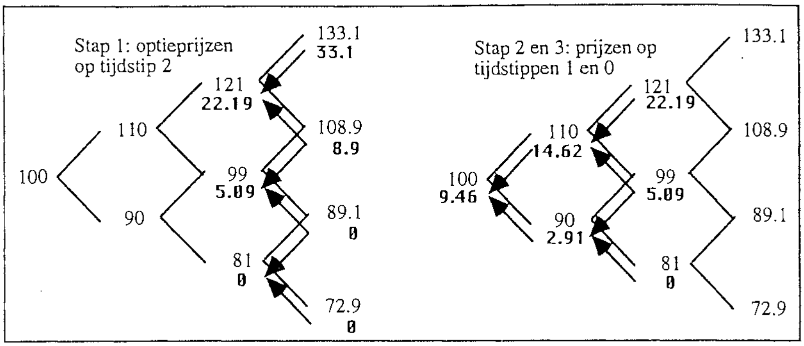
V. UITBREIDINGEN

Zoals net gesuggereerd werd, kan het model uitgebreid worden om rekening te houden met meerdere bronnen van onzekerheid dan alleen de richting van de veranderingen in de wisselkoers – met name, de variantie per deelperiode, en de rentevoeten. Dergelijke uitbreidingen zijn te ambitieus voor een bescheiden tekst als deze; we beperken ons tot uitbreidingen binnen een één-factormodel: meer-perioden-opties, power calls en puts, opties op futures en op aandelen, en Amerikaanse en Bermuda-opties.

A. *Meer-periode-opties*

De oplossing van het twee-periodeprobleem is gemakkelijk veralgemeend. Stel bevoorbeeld dat je een drie-periode-optie moet waarderen. Er zijn dan vier mogelijke slotkoersen, en vier overeenkomstige callprijzen. Elk van de drie paren van naast elkaar gelegen slotwaardes kan vertaald worden naar een verwachte optieprijs één periode vroeger, en levert dus, na disconteren, de optieprijs in elk van de drie mogelijke knooppunten op tijdstip 2. Die drie mogelijke callprijzen leveren dan twee mogelijk callprijzen op ogenblik 2, en die laatste twee leiden tot de optieprijs op ogenblik 0. Figuur 7 illustreert dit in de ons bekende boom met $r = 5\%$/periode en $q = 0.6$, voor een call met uitoefenprijs 100. In deze boom staan, in elk knooppunt, de wisselkoersen aangegeven, met daaronder, in vetjes, de call-prijzen.

FIGUUR 7



B. *Andere Europese opties*

Tot nu toe hadden we het alleen over Europese calls. De logica is echter perfect overdraagbaar naar andere Europese opties, zoals puts, of power-opties, of opties op futures.

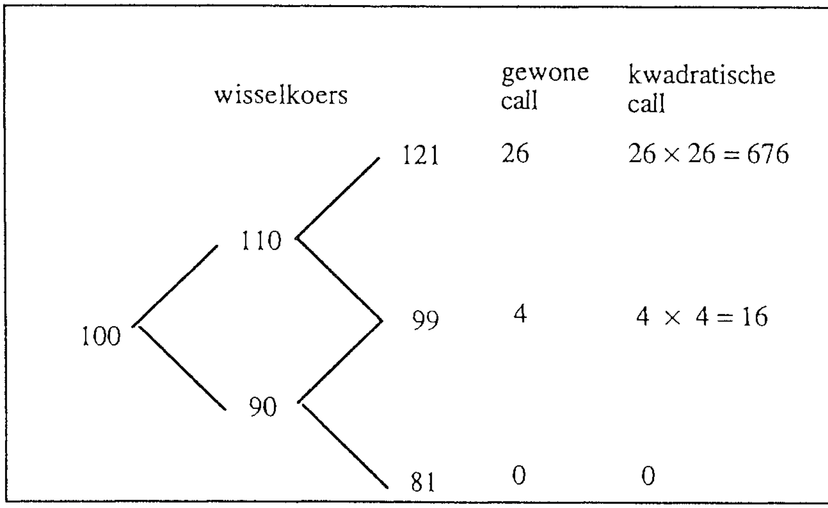
Een *power-call* is een call die een slotwaarde heeft gelijk aan een bepaalde macht van een gewone call. Figuur 8 toont de slotwaarde van een kwadratische call in de ons bekende twee-periode-boom. Afgezien van de nieuwe slotwaardes, wordt de optieprijs wordt bepaald net zoals bij een gewone call: bereken in elk knooppunt het gewogen gemiddelde van de twee volgende optie-waardes, en disconteer; en blijf verder werken tot je op ogenblik 0 komt:

$$\text{callwaarde}\ (S_1 = 110) = \frac{676 \times 0.60 + 16 \times 0.4}{1.05} = 392.4\,, \qquad (27a)$$

$$\text{callwaarde}\ (S_1 = 90) = \frac{16 \times 0.60 + 0 \times 0.4}{1.05} = 9{,}14\,, \qquad (27b)$$

$$\text{callwaarde}\ (S_0 = 100) = \frac{392.4 \times 0.60 + 9.14 \times 0.4}{1.05} = 239.1\,. \qquad (27c)$$

FIGUUR 8



Het is duidelijk dat power-opties veel spekulatiever zijn dan gewone opties. Maystadt heeft om die reden power-opties gebruikt in een poging om zich uit zijn swap-wespennest te gokken.

De procedure om een put, of een power-put, te waarderen is analoog: je vertrekt van de slotwaardes van het instrument dat je wil waarderen, maar dan werk je terug naar ogenblik 0 toe, net zoals bij de call. Figuur 9 geeft een voorbeeld voor een gewone Europese put met X=100, alle overige parameters zoals voorheen. De putprijzen worden berekend als volgt:

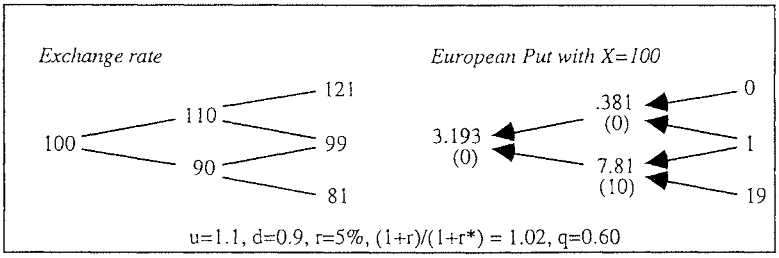
$$\text{Putprijs}(S_1 = 110) = \frac{(0.6 \times 0) + (0.4 \times 1)}{1.05} = 0.381\,, \qquad (28a)$$

$$\text{Putprijs}(S_1 = 90) = \frac{(0.6 \times 1) + (0.4 \times 19)}{1.05} = 7.81\,, \qquad (28b)$$

$$\text{Putprijs}(S_0 = 100) = \frac{(0.6 \times 0.381) + (0.4 \times 7.81)}{1.05} = 3.193\,. \qquad (28c)$$

In de grafiek worden, onder elk van deze optieprijzen, ook de corresponderende intrinsieke waardes weergegeven, dwz. de waarde van onmiddellijke uitoefening. Deze zullen nuttig blijken bij het waarderen van Amerikaanse opties.

FIGUUR 9



Een call-optie op een futurescontract, tenslotte, heeft als uitoefeningswaarde het verschil tussen de futuresprijs en de uitoefeningsprijs (indien uitgeoefend, dwz. als het verschil positief is). Een putoptie op een futurescontract, heeft als uitoefeningswaarde het verschil tussen de uitoefeningsprijs en de futuresprijs (indien uitgeoefend, dwz. als het verschil positief is). Je moet dus een boom voor futuresprijzen berekenen uit de boom voor kontantkoersen[8], en verder werken als voorheen.

C. *Amerikaanse en Bermuda-opties*

Het kenmerk dat Amerikaanse opties onderscheidt van Europese is dat Amerikaanse opties ook op elk tussenliggend ogenblik kunnen uitgeoefend worden. De waardering is dus iets ingewikkelder, omdat je in elk knooppunt moet nagaan wat de beste beslissing is – onmiddellijk uitoefenen, of wachten. In de praktijk betekent dit dat er één lijn aan je computerprogramma moet toegevoegd worden. De procedure wordt hieronder geïllustreerd voor het put-voorbeeld in Figuur 9.

Bekijk eerst het knooppunt met $S_1 = 110$. Bij die koers kan het niet rationeel zijn om onmiddellijk een verkooprecht te lichten met uitoefeningsprijs 100; de intrinsieke waarde van de optie is dan ook nul, en de gehele marktwaarde van de put is dan gebaseerd op de mogelijke uitoefening op ogenblik 2. De huidige waarde, in knooppunt $S_1 = 110$, van eventuele latere uitoefeningswinsten hebben we al berekend in (28a), en bedraagt 0.381. De Amerikaanse optie is dus 0.381 waard wanneer $S1$ gelijk is aan 110, net zoals de Europese.

De zaken liggen anders in knooppunt $S_1 = 90$. Onmiddellijke uitoefening levert je dan 10 op (de intrinsieke waarde, of ook nog de waarde *dood*), wat niet a priori te verwerpen is. Als je daarentegen een periode wacht, dan realiseer je misschien 19, maar misschien ook

1. De logische manier om dit alternatieven te beoordelen is de huidige waarde te berekenen van de onzekere opbrengst van latere uitoefening – de waarde *levend*. Dit is al gebeurd in vergelijking (28b), en levert een marktwaarde *levend* op van 7,81. De keuze is nu duidelijk: ofwel wachten we, en dan bezitten we een optie met waarde 7.81; ofwel oefenen we nu uit, wat 10 oplevert. We kiezen dus onmiddellijke uitoefening. De marktwaarde van een Amerikaanse optie in knooppunt $S_1=90$ is dus 10, niet 7.81 zoals voor de Europese[9].

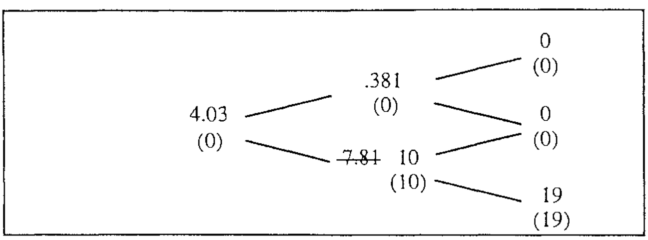
Dit heeft dan repercussies op de prijs op ogenblik 0. We berekenen weer de prijs *levend* en de waarde *dood*:

$$\text{Amerikaanse put } \textit{levend}\ (S_0 = 100) = \frac{(0.6\times 0.381) + (0.4\times 10)}{1.05} = 4.03\,, \tag{29a}$$

$$\text{Amerikaanse put } \textit{dood}\ (S_0=100) = 0, \tag{29b}$$

$$\text{Marktprijs Amerikaanse put } (S_0=100) = 4.03. \tag{29c}$$

FIGUUR 10



Voor het waarderen van Amerikaanse opties gaat men, kortom, in elk knooppunt nog steeds de waarde *levend* berekenen uit de twee daaropvolgende optie-waarden. Het nieuwe element is dat de marktwaarde het maximum is van de waarden *levend* en *dood*, eerder dan (zoals bij Europese opties) a priori gelijk aan de waarde *levend*.

Een Bermuda-optie ligt ergens tussen de Amerikaanse en Europese in, en kan uitgeoefend worden op een beperkt aantal tijdstippen eerder dan permanent (Amerikaans) of slechts op één ogenblik (Europees). De waardering gebeurt weer door op elke tussenliggende vervaldag een vergelijking te maken tussen de waarden *levend* en *dood*, en de marktwaarde gelijk te stellen aan de grootste van de twee.

D. *Aandelenopties*

Al het voorgaande had betrekking op valuta-opties. De return op een belegging in vreemde munt bestaat dan uit twee componenten, de koersverandering en de buitenlandse rente. Bij aandelen daarentegen zijn de twee componenten de koersverandering en de dividenden. Dividenden nemen dus ongeveer de rol over van de buitenlandse rente, met als complicaties dat (a) dividenden, in tegenstelling tot interestvoeten, doorgaans niet lang op voorhand vastgelegd worden, en (b) het uitbetalen van een dividend de aandelenkoers doet zakken terwijl het uitbetalen van interest geen impact heeft op een wisselkoers.

We bekijken vier gevallen, die alle uitgaan van vereenvoudigende veronderstellingen over het dividend of de dividenden die zullen uitbetaald worden binnen de looptijd van de optie. Geen van die vereenvoudigingen (behalve, in sommige omstandigheden, het model zonder dividend) is echt realistisch; bij de toepassing ervan is het dus nodig in gedachten te houden dat het inbrengen van dividenden nog een bijkomende natte-vinger-veronderstelling vereist.

1. Aandelen zonder dividenden

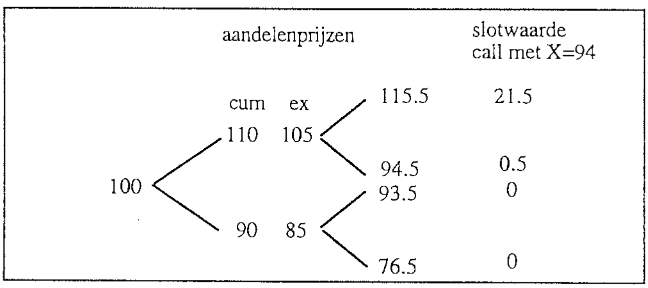
De vertaling van de prijstheorie voor valuta-opties naar aandelenopties is eenvoudig als er met zekerheid geen dividend uitbetaald wordt tijdens de looptijd van de optie. In dat geval bestaat de hele aandelenreturn uit de koersverandering – net als bij een vreemde munt met zero rente. Het volstaat dus om, in het voorgaande, de buitenlandse rente r^* gelijk te stellen aan nul om een theorie te krijgen over aandelen zonder dividenden. Meer in het bijzonder ga je u en d baseren op de totale return – (inclusief dividenden, als je gegevens uit het verleden gebruikt), en q vaststellen als

$$q = \frac{(1+r) - \mathrm{d}}{u - d}\,. \qquad (30)$$

2. Aandelen met één dividend, gekend als een absoluut bedrag

Als het aandeel, binnen de looptijd van de optie, één dividend uitbetaalt waarvan het *bedrag* op voorhand gekend is, dan bouw je een binomiale boom waarin, op de ex-dividend-dag, de prijzen zakken met het dividend (na RV, in België). Dit wordt uitgetekend in Figuur 11, waar in periode 1 een dividend van netto 5 frank uitbetaald wordt. Bemerk dat, in dit model, de koers na "op - neer" niet meer dezelfde is als de koers na "neer - op" – dit in tegenstelling tot het basismodel, waar het pad "neer - op" rekombineert met het pad "op - neer". Dit niet-rekombineren komt omdat er nu, ongeacht de prijs op tijdstip 1, een gekend *bedrag* van de prijs afgaat. Als de boom langer wordt en het dividend uitbetaald wordt vlak na periode N_1, dan heb je in zo'n model dus N_1+1 verschillende deelbomen nodig om de rest van de prijsevolutie uit te tekenen. Dit vertraagt behoorlijk de waardering van de optie.

FIGUUR 11



Bij een Amerikaanse call zonder dividend-bescherming bestaat dikwijls de verleiding om vlak vóór de ex-dag uit te oefenen, en voor de Amerikaanse put zonder dividend-bescherming is het analoog vaak nuttig om vlak ná de ex-dag uit te oefenen. Dit zijn de keuzen die we moeten inbouwen in de binomiale waarderingsprocedure model. In Figuur 11 geven we de slotwaarden van een call met X=94. Neem weer aan dat r = 0.05 en q = 0.50. Een Amerikaanse call-optie wordt dan als volgt gewaardeerd:

i) je oefent onmiddellijk uit als, op tijdstip 1, de prijs naar 110 (*cum*) gaat – aannemende dat de optie tegen dan nog niet gelicht is:

$$\text{waarde } \textit{levend } (S_1 = 110) = \frac{21.5\times 0.50+0.5\times 0.50}{1.05} 10.476 . \quad (31a)$$

$$\text{waarde } \textit{dood } (S_1=110)=110-94=16 > 10.476 \Rightarrow \text{marktwaarde } (S_1=110)=16. \quad (31b)$$

ii) de optie is daarentegen waardeloos als op tijdstip 1 de prijs naar 90 gaat:

$$\text{waarde } \textit{levend } (S_1=90) = 0 \tag{31c}$$

$$\text{waarde } \textit{dood } (S_1=90) = 0 \Rightarrow \text{marktwaarde } (S_1=90) = 0. \tag{31d}$$

iii) gegeven het voorgaande is het best om op ogenblik 0 niet onmiddellijk uit te oefenen:

$$\text{waarde } \textit{levend } (S_0 = 100) = \frac{16\times 0.50+0.0\times 0.50}{1.05} 7.619. \tag{31e}$$

$$\text{waarde } \textit{dood } (S_1=100) = 100-94 = 6 < 7.619 \Rightarrow \text{marktwaarde } (S_0=100) = 7.619. \tag{31f}$$

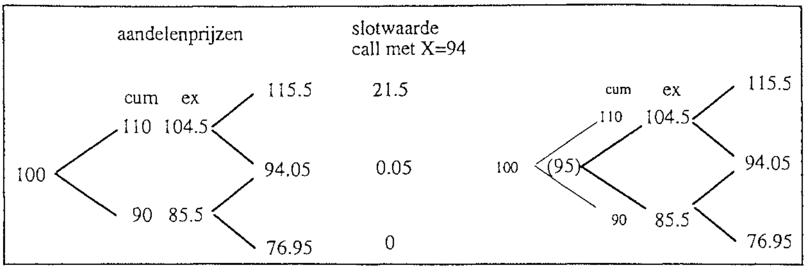
Deze berekeningen illustreren hoe dividenden een goede reden kunnen zijn om vervroegd te oefenen, en hoe vervroegde uitoefening typisch (maar niet altijd) net vóór een ex-dag gebeurt. Als er meerdere dividenden zijn, gebeurt eventuele vervroegde lichting typisch bij het laatste dividend voor de vervaldag van de optie.

3. Aandelen met één dividend, gekend als een percentage

Een ander eenvoudig geval bestaat erin dat het aandeel, binnen de looptijd van de optie, één dividend uitbetaalt waarvan het bedrag bepaald is als een *gekend percentage* van de cum-koers van die dag. Het is niet a priori duidelijk of dit realistischer is dan het vorige geval, maar het maakt de binomiale boom wel veel eenvoudiger, en de berekeningen overeenkomstig sneller. Figuur toont een twee-periode-boom als het dividend 5% is van de cum-prijs op ogenblik 1. De prijs na "op - neer" re-kombineert nu terug met de prijs na "neer - op", wat het uitzetten van de boom vereenvoudigt en versnelt. De waardering van een optie is analoog als in het vorige geval.

Voor *Europese* opties bestaat er nog een eenvoudiger oplossing: (a) verlaag gewoon de initiële prijs (100) met het dividendpercentage (dwz. 100 × (1–0.05)=95), om de huidige waarde van het ex-dividend-aandeel te berekenen; en (b) bereken dan een gewone boom, vertrekkende vanuit die verlaagde prijs, zoals aangegeven in de rechterhelft van de grafiek. Dit genereert de juiste verdeling van slotkoersen, wat voldoende is om Europese opties te waarderen.

FIGUUR 12



Beide benaderingen, het "gekende bedrag" en "gekende percentage" model, kunnen gemakkelijk uitgebreid worden tot situaties waar op meerdere (gekende) data dividenden uitbetaald worden tijdens de looptijd van de optie. Het is sterk aan te bevelen te zorgen dat de ex-dagen (en vooral de eerste ex-dag) exact samenvallen met "tijdstippen" in de boom, en dat op de eerste ex-dag de boom reeds een ruime waaier prijzen bevat. De parameters u en d, en q, blijven bepaald zoals in het model zonder dividend omdat het dividend expliciet als correctie in de boom ingebouwd wordt.

4. Aandelen met een continu dividend, gekend als een percentage

In de VS betalen aandelen meestal vier dividenden per jaar, en zijn de ex-dagen niet erg homogeen over de bedrijven heen. De dividendenstroom op een sterk gediversifieerde portefeuille aandelen wordt dan ook vrijwel continu. Voor opties op een aandelenindex gaat men dan ook vaak veronderstellen dat, na elke periode, een vast percentage uitbetaald wordt.

Dit brengt ons in de buurt van valuta-opties, waar ook continu rente verdiend wordt op buitenlandse valuta. De enige kronkel is dat een buitenlandse rentevoet een percentage is van de *ex*-prijs – je krijgt de rente *bovenop* de slotkoers – terwijl dividend-rendementen meestal uitgedrukt worden als een percentage van de *cum*-prijs. Het omrekenen van een percentage van de *cum*-prijs naar een percentage van de ex-prijs is echter eenvoudig. Als het dividend *per periode* gelijk is aan

$\delta\%$ van S^{cum}, dan is de prijs *ex* gelijk aan $S^{cum} \times (1-\delta)$, en wordt het dividendrendement als fraktie van de exprijs gelijk aan $[S^{cum} \times \delta]/[S^{cum} \times (1-\delta)]=\delta/(1-\delta)$. Het volstaat dan, om in de theorie van valuta-opties, overal r^* gelijk te stellen aan $\delta/(1-\delta)$, en u en d te berekenen op basis van de beursindex (exclusief dividendrendement). Als je daarentegen u en d baseert op de totale returns, gebruik je nog steeds (30) om q te bepalen.

VI. BESLUIT

We hebben gezien hoe je een quasi-onvoorspelbaar proces, zoals een vlottende wisselkoers of een aandelenprijs, kan benaderd worden door een binomiaal proces. Het simpele ééndimensionale proces neemt aan dat de periode-per-periode onzekerheid constant is over de hele looptijd – een veronderstelling die behoorlijk verkeerd kan uitdraaien – en dat ook de rentevoet(en) constant zijn. Andere cruciale veronderstellingen zijn dat de schrijver op elk ogenblik elke verrichting kan doen zonder de marktprijzen te beïnvloeden en zonder andere kosten op te lopen.

Binnen elke deelperiode gaat, in een binomiaal proces, de prijs ofwel omhoog ofwel omlaag, met gekende sprong-groottes. Aangezien er op ogenblik t+1 maar twee mogelijke toestanden zijn, en aangezien twee punten perfect gevat kunnen worden door een rechte lijn, kan je altijd de optieprijs, volgende periode, repliceren met behulp van lineaire instrumenten zoals beleggingen of leningen in de twee munten. Nu kan je de kostprijs van elk lineair instrument zonder probleem berekenen, en daarom is het eenvoudig de kostprijs van de gehele replicerende portefeuille te vinden. Deze logica wordt periode per periode toegepast, beginnend van de slotwaarde van de optie en dan achterwaards werkend tot ogenblijk 0 bereikt wordt, het waarderingsogenblik. De redenering levert, als bijproduct, ook een dynamische indekstrategie op, die echter kan mislopen als de veronderstellingen verkeerd blijken te zijn. Een leuk inzicht, tenslotte is, dat het hele model kan geïnterpreteerd worden als gebaseerd op voor risico aangepaste verwachte waarden, waarvoor men de benodigde informatie vindt in de termijnmarkt. Het model wordt hier voorgesteld aan de hand van valuta-calls, maar kan zonder noemenswaardige problemen uitgebreid worden tot bijvoorbeeld power calls en puts, opties op futures en op aandelen, en Amerikaanse en Bermuda-opties.

NOTEN

1. De vervaldag van het termijncontract is niet vermeld in de notatie F_t; alle termijncontracten gebruikt in de tekst zijn, bij veronderstelling, contracten voor één periode.
2. Als er een betaling is op ogenblik 0, dan is dat eventueel een waarborg en/of een commissie, wat iets helemaal anders is dan een prijs. De prijs zelf is nul. De commissie is nul in een perfecte markt; en de waarborg kost niets omdat de rente erop toevloeit aan de klant.
3. $\ln S_t^{-1} = -\ln S_t$. Dus is $\ln S_{t+1}^{-1} - \ln S_t^{-1}$ gelijk aan $-[\ln S_{t+1} - \ln S_t]$ - de "up"-verandering voor de ene munt wordt de "down"-verandering voor de andere, en omgekeerd.
4. Is de rente op twee jaar bv. 4 %, dan kan je op twee jaar beleggen en dit zonder risico financieren met twee opeenvolgende éénjarige leningen aan 3.72 %.
5. Denk eraan de r altijd een rentevoet per binomiale periode voorstelt, niet een *per annum* interestvoet. De vraag die hier opgeworpen wordt is welke *per annum* interestvoet je omrekent naar bijvoorbeeld weekbasis (als je de binomiale periode definieert als een week).
6. Bemerk dat niet zozeer het *constant* zijn van u, d, r en r* belangrijk zijn voor de oplosbaarheid van het probleem maar wel de *voorspelbaarheid* ervan. Als u, d, r en r* fluctueren op een perfect voorspelbare wijze, kan men nog altijd optieprijzen berekenen, zoals hierna zal aangetoond worden.
7. De beschrijving van gamma-hedging laten we over aan andere bronnen - elk standaardwerk over opties kan hiervoor raad brengen.
8. Futureskosten zijn vrijwel dezelfde als termijnkosten, dus ja kan een futuresprijs geldig op datum t voor levering op datum n berekenen als $F_t^n = S_t\,[(1+r)/(1+r^*)]^{n-t}$. De *u*- en *d*-factoren zullen dus anders zijn dan voor het contantkoers-proces. De eenvoudigste procedure is q te berekenen uit de *u*- en *d*-factoren van het contantkoersproces.
9. De marktwaarde van een Amerikaanse optie kan nooit *lager* liggen dan de intrinsieke waarde, zoniet zou je een arbitragewinst kunnen realizeren door te kopen en onmiddellijk uit te oefenen. In het licht van de gedisconteerde waarde van mogelijke latere uitoefening is er ook geen reden om de prijs *boven* de intrinsieke waarde te zetten, althans in knooppunt $S_1 = 90$. Dus is in dat knooppunt de marktprijs gelijk aan de intrinsieke waarde, de waarde die elk rationeel belegger realizeert door onmiddellijk uit te oefenen.

REFERENTIES

Black, F. en M. Scholes, 1973, Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, May, 637-654.

Cox, J.C., S. Ross en M.Rubinstein, 1979, Option Pricing: a Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, July, 229-264.

Edirisinghe, C., Naik, V. en R. Uppal; 1993, Optimal Replication of Options with Transaction Costs and Trading Restrictions, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28, 117-138.

Merton, R.C., 1971, Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model, *Journal of Economic Theory* 3, 373-413.

Merton, R.C., 1973, Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, Spring, 141-183.

Leland, H., 1985, Option, Pricing and Replication with Transaction Costs, *Journal of Finance* 40, 1283-1301.

Rendleman, R. En B. Bartter, 1980, The Pricing of Options on Debt Securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15, March, 11-24.

Sercu, P. en R. Uppal, 1995, International Financial Markets and the Firm, (South-Western College Publishing, Cincinnati, ITP).

Sharpe, W.F., 1978, Investments, (Prentice-Hall International Inc., Englewood Cliffs, N.J.).